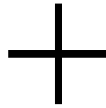
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΑΓΑΠΗΣ ΚΙ ΕΥΤΥΧΙΑΣ

Απλό γραμμικό μοντέλο

- dR /dt = a R + b J
- dJ /dt = c R + d J
- όπου

  R είναι η αγάπη του Ρωμαίου για την Ιουλιέτα
  J είναι η αγάπη της Ιουλιέτας για τον Ρωμαίο
  (ή μίσος αν είναι αρνητικές οι τιμές τους)
  a , b , c , d είναι σταθερές που καθορίζουν τα «ρομαντικά στυλ»

> Να λυθεί το σύστημα για τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων
> $a>0$, $b<0$, $c<0$
> και να ερμηνευτεί το αντίστοιχο «ρομαντικό στυλ»

Λύση

Μετασχηματισμός του απλού γραμμικού συστήματος σε γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές .

$dR/dt = a R + b J$ (1)

$dJ/dt = c R + d J$ (2)

Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε

$d^2R/dt^2 = a\, dR/dt + b\, dJ/dt$ (3)

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με d και την (2) με b και έχουμε
d dR/dt = ad R + bd J
b dJ/dt = cb R + db J
τις αφαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε
d dR/dt - b dJ/dt = (ad - cb)R $\Rightarrow$
b dJ/dt = d dR/dt + (cb -ad)R (4)

η (3) με βάση την (4) γίνεται
$d^2R/dt^2 = (a + d)dR/dt + (cb - ad)R \Rightarrow$
$d^2R/dt^2 + x\, dR/dt + y\, R = 0$ όπου x=-(a + d) και y= ad – cb

Λύση της διαφορικής εξίσωσης R′′+x R′+y R = 0 (5).

Επειδή η συνάρτηση $R(t)=e^{ct}$ έχει την ιδιότητα ότι οι R′(t) και R′′(t) είναι πολλαπλάσια της R(t) είναι εύλογο να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής e^{ct}.

Αντικαθιστώντας στην (5) έχουμε
$(c^2+x\,c+y)\,e^{ct}=0$ και εφόσον ο παράγοντας e^{ct} δεν μηδενίζεται έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $c^2+a\,c+y$ ισούται με 0 .
$c^2+x\,c+y = 0 \Rightarrow$

$c_{1\,2}=[-x \pm\sqrt{(x^2-4y)}]/2$

<u>περίπτωση 1</u>

Αν $x^2-4y>0$ οι c_1 και c_2 είναι πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες . Οι συναρτήσεις $R_1(t)= e^{c_1 t}$ και $R_2(t)= e^{c_2 t}$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις εφόσον η ορίζουσα Wronski είναι διάφορη του μηδενός .

$$W(R_1,R_2)(t)=\begin{vmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_1'(t) & R_2'(t) \end{vmatrix}=(c_2-c_1)\,e^{(c_2-c_1)t} \neq 0$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι η

R(t)=$k_1 e^{c_1 t}$ +k_2 $e^{c_2 t}$

περίπτωση 2

Αν x^2-4y<0 οι c_1 και c_2 είναι μιγαδικές ρίζες . Έστω ότι $c_{1,2}$=α ± βi με
α,β $\in \Re$. Τότε η γενική λύση είναι η
R(t)= k_1 $e^{(\alpha-\beta i)t}$ +k_2 $e^{(a+\beta i)t}$
Η μιγαδική αυτή λύση δίνει πραγματική λύση με τη βοήθεια του τύπου του Euler ($e^{i\theta}$=συνθ+i ημθ) .

περίπτωση 3

Αν x^2-4y=0 , έχουμε δηλαδή διπλή ρίζα , τότε c_1=c_2 =c_0 και προφανώς μία λύση είναι η $e^{c_0 t}$.Για να βρούμε μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση , χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του υποβιβασμού τάξης . Η γενική λύση είναι

R(t)=(k_1+k_2t) $e^{c_0 t}$

Επιστροφή στο πρόβλημά μας .

$c_{1,2}$=[-x ±√(x^2-4y)]/2⇒ $c_{1,2}$=[(a+d) ±√($(a-d)^2$+4bc)]/2
Η διακρίνουσα είναι θετική διότι $(a-d)^2$≥0 και 4bc>0 ,διότι b,c ομόσημα .
Εμπίπτει στην πρώτη περίπτωση και άρα έχουμε

R(t)=$k_1 e^{c_1 t}$ +k_2 $e^{c_2 t}$ και λόγω της (1)

J (t)= $\frac{k_1}{b}(c_1 - a)e^{c_1 t} + \frac{k_2}{b}(c_2 - b)e^{c_2 t}$

Για να ερμηνεύσουμε το «ρομαντικό στυλ» θα υποθέσουμε (τελείως εικονικά) ότι R(0)=2 ,J(0)=2 , a=2 , b=-1 ,c=-1 και d=2 $c_1=3$, $c_2=1$

$R(0)=2 \Rightarrow K_1+K_2=2$

$J(0)=2 \Rightarrow -K_1-2K_2=2$ συνεπώς $K_1=6$ και $K_2=-4$

Οι συναρτήσεις R,J γίνονται

$R(t)=6\, e^{3t}-4e^{t}$

$J(t)=-6\, e^{3t}+8e^{t}$

Από την παρακάτω γραφική παράσταση (με γαλάζιο η C_R και με ροζ η C_J) φαίνεται ότι η αγάπη του Ρωμαίου δεν έχει ανταπόκριση .Παρόλα αυτά η αγάπη του αυξάνεται σε αντίθεση με αυτή της Ιουλιέτας που συνεχώς μειώνεται .

